Лекция 5. Вариационный принцип Гамильтона. Уравнение Лагранжа 2-го рода. Построение математических моделей различными методами.

Как отмечалось ранее, моделирование на базе вариационных принципов по своей широте и универсальности сопоставимо по своим возможностям с моделированием на базе фундаментальных законов природы.

Вариационные принципы представляют собой весьма общие утверждения о рассматриваемом объекте (системе, явлении) и гласит, что из всех возможных вариантов его поведения выбираются лишь те, которые удовлетворяют определенному условию: обычно согласно этому условию некоторая связанная с объектом величина достигает экстремального значения при его переходе из одного состояния в другое.

Вариационный принцип Гамильтона

В качестве фундамента механики могут рассматриваться не только уравнения движения и законы, связывающие механические параметры в данный момент времени t. Они могут использовать также некоторые общие свойства, характеризующие движение механической системы в целом, на любом произвольном отрезке времени от t_0 до t_1.

Убедимся в этом рассматривая величину:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt, \qquad (1)$$

которое называется действием по Гамильтону на отрезке **[t_0, t_1].**

Здесь Q – **является функционалом**, зависящим от того, как движется система в момент $t_0 \le t \le t_1$.

$L(q(t), \dot{q}(t), t)$ **- Лагранжиан.**

Возьмем в (n+1)-мерном пространстве q, t две точки $M_0(q(t_0), t_0)$ и $M_1(q(t_1), t_1)$ (Рис. 1), зафиксировав тем самым моменты t_0, t_1 и положение системы в эти моменты («скорости» $\dot{q}(t)$ в моменты t_0, t_1 не фиксируются).

Из точки M_0 в точку M_1 можно попасть по любым кинематически возможным траекториям («путям»). Пусть среди них есть «прямой» путь движения (сплошная линия). По условию на нем функции $q_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ в любой момент времени t подчиняются уравнениям **Лагранжа II-го рода:**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad (2)$$

Остальные пути будем называть «окольными» путями

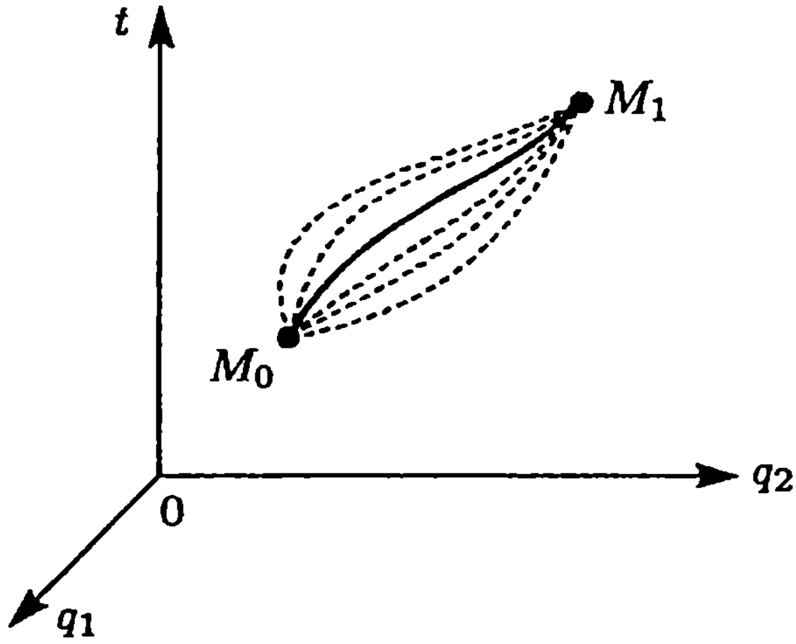

Рисунок 1 – Кинематически возможные траектории

Выражение (2) –уравнение Лагранжа II-го рода.

Принцип Гамильтона говорит о том, что действие $\boldsymbol{Q}$ имеет на прямом путь экстремальное значение по сравнению с окольными путями и выражается следующим образом:

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0 \qquad (3)$$

<u>Докажем этот принцип</u>.

Охарактеризуем все возможные пути однопараметрическим семейством функций: $q_i = q_i(t,\alpha)$, $t_0 \le t \le t_1$,

где $\alpha = 0$ - означает прямой путь, $\alpha \neq 0$ - означает окольные пути.
Тогда действие, очевидно, будет являться функцией параметра α:

$$Q(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \qquad (4)$$

Вариация (4) при варьировании параметра α есть:

$$\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \qquad (5)$$

т.е., это сумма приращений, вызванных вариацией координат $\delta q_j(t,\alpha)$ и скоростей $\delta \dot{q}_j(t,\alpha)$.

Используем в (5) перестановку операций варьирования:

$$\delta \dot{q}_i = \left(\frac{dq_i(t,\alpha)}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} q_i(t,\alpha)\delta\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} q_i(t,\alpha)\delta\alpha \right) = \frac{d}{dt}\left(\delta q_i\right) \qquad (6)$$

То есть в (5) заменим $\delta \dot{q}_i$ на $\frac{d}{dt}\left(\delta q_i\right)$:

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{u} \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\delta q_i\right)dt}_{dv} \qquad (7)$$

Проинтегрируем по частям второе слагаемое в правой части (7) $(uv - \int vdu)$ и придем к равенству:

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \qquad (8)$$

Второе слагаемое в (8) равно нулю по определению, что вариация δq_i на малом промежутке времени t равна 0.

Отсюда следует, что:

$$\delta Q = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt \qquad (9)$$

Выражение в скобках есть уравнение Лагранжа – 2 рода, которое равно нулю.

Отсюда следует, что

$$\delta Q = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt = 0, \qquad (10)$$

что и требовалось доказать.

И в итоге мы получаем следующие условие $\delta Q = 0$. Это принцип Гамильтона - принцип наименьшего действия.

<u>Пример</u> ***Построение математической модели колебания маятника на основе уравнения Лагранжа 2-го рода.***

Вспомним ранее рассмотренный пример маятника, схема которого представлена на рис. 2 – на неподвижный шарнир подвешен стержень длиной l, на конце которого находится груз массой m. Шарнир считается идеально гладким, т.е. в нем не происходит потери энергии. Сопротивлением воздуха пренебрегаем. Стержень считаем невесомым. То есть задача идеализируется – изучаем движение только массы m.

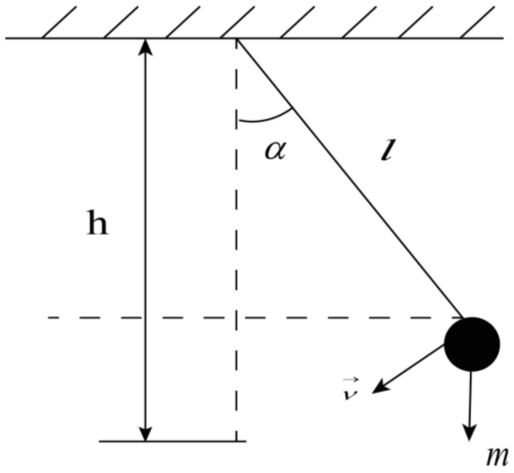

Рисунок 2 – Схема колебания маятника

После указанных допущений можно считать, что положение маятника определяется лишь одной обобщенной координатой – углом $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})$. При этом $\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{dt}}$ - есть обобщенная скорость.

Если для консервативных систем:

$$L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = T - U\,, \tag{11}$$

где ***T***- кинетическая энергия, ***U***- работа потенциальных сил или потенциальная энергия, то уравнение Лагранжа 2-го рода можно представить:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \tag{12}$$

Известно, что:

$$T = \frac{1}{2} m v^2\,. \tag{13}$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ - есть угловая скорость. Она равна $\boldsymbol{v = \omega r}$, где $\boldsymbol{\omega = \frac{d\alpha}{dt}}$ - скорость вращения в данном случае, где $\boldsymbol{r = l}$- радиус вращения массы $\boldsymbol{m}$. Тогда кинетическую энергию можно представить как:

$$T = \frac{1}{2} m \left(l \frac{d\alpha}{dt} \right)^2\,. \tag{14}$$

Потенциальная же энергия в данном случае определяется как:

$$U = mgh = -mg(l\cos\alpha - l). \tag{15}$$

В качестве $q_i(t)$ берем угол поворота маятника, а в качестве $\dot{q}_i(t)$ - скорость его вращения, тогда

$$q_i(t) = \alpha(t), \qquad \dot{q}_i(t) = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)} = \frac{1}{2} l^2 \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial\left[mgl - mgl\cos\alpha(t)\right]}{\partial\alpha} = 0 + mgl\sin\alpha(t) \tag{16}$$

Подставим (16) в (12), имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\frac{d\alpha}{dt}\right) - 0 + mgl\sin\alpha = 0, \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0, \quad \textit{для} \quad \textit{малого угла} \ \alpha, \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}.$$

Принцип Остроградского Гамильтона

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T - U + \Pi_{out})dt = 0, \tag{17}$$

Он лежит в основе вариационных принципов для механических систем
В этом случае интегральное действие выражается через энергии, где T – кинетическая энергия системы, U – внутренняя потенциальная энергия, Π_{out} – потенциал внешних сил. Рассмотрим пример использования этого принципа для создания математической модели.

Модель колебаний маятника на основе принципа Остроградского-Гамильтона:

Для составления модели колебания выше указанного маятника здесь воспользуемся вариационным принципом Остроградского-Гамильтона. Согласно этому принципу вариация полной энергии рассматриваемой системы на малом промежутке времени равна нулю, то есть:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U+\Pi)dt=0. \qquad (18)$$

Определяем кинетическую **T** и потенциальную **U** энергии системы. Энергия же внешних сил **П** в данном случае отсутствует, т.е. равна нулю.

Известно, что:

$$T=\frac{1}{2}mv^2. \qquad (19)$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ - есть угловая скорость. Она равна $\boldsymbol{v=\omega r}$, где $\boldsymbol{\omega=\frac{d\alpha}{dt}}$ - скорость вращения в данном случае, где $\boldsymbol{r=l}$- радиус вращения массы $\boldsymbol{m}$. Тогда кинетическую энергию можно представить как:

$$T=\frac{1}{2}m\left(l\frac{d\alpha}{dt}\right)^2. \qquad (20)$$

Потенциальная же энергия в данном случае определяется как:

$$U=mgh=-mg(l\cos\alpha-l). \qquad (21)$$

Подставляем (21) и (20) в (12):

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\left(l\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+mg(l\cos\alpha-l)\right]dt=0. \qquad (22)$$

Варьируем подынтегральное выражение:

$$ml\int_{t_1}^{t_2}\delta\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+g(\cos\alpha-1)\right]dt=0, \qquad (23)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)+g(\delta\cos\alpha-\delta 1)\right]dt=0, \qquad (24)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\frac{d}{dt}(\delta\alpha)-g\sin\alpha\delta\alpha\right]dt=0, \qquad (25)$$

Интегрируя (25) по частям, где за u принимаем $u = l\frac{d\alpha}{dt}$, *за* dv принимаем $dv = \frac{d}{dt}(\delta\alpha)$, *имеем:* $\int\limits_{t_1}^{t_2} u\frac{dv}{dt}dt = uv\Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} v\frac{du}{dt}dt$

то есть

$$l\frac{d\alpha}{dt}\delta\alpha\Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} l\frac{d^2\alpha}{dt^2}dt\delta\alpha - \int\limits_{t_1}^{t_2} g sin\alpha\delta\alpha dt = 0. \qquad (26)$$

Первое слагаемое в (26) равно нулю ввиду равенства вариации угла **α(t)** нулю на малом интервале времени $t_1 \div t_2$. Тогда, группируя оставшиеся слагаемые в (26), получим:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \delta\alpha\left[l\frac{d^2\alpha}{dt^2} + g sin\alpha\right]dt = 0, \qquad (27)$$

откуда следует равенство нулю подынтегрального выражения, то есть:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}sin\alpha = 0. \qquad (28)$$

Это и есть модель колебаний маятника, характеризующая его отклонение на угол $\alpha(t)$ относительно его невозмущенного состояния.

Обобщая модель (22), ее можно записать в виде:

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{dt}^2} + \mathrm{F}(\alpha) = 0. \qquad (29)$$

Модели (28) - (29) есть нелинейные модели. В частности, раскладывая $\boldsymbol{sin\alpha}$ в ряд Тейлора:

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + ... + (-1)^n\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \qquad (30)$$

и ограничиваясь степенями неизвестной $\alpha(t)$ не выше третьей, модель (28) можно представить следующим образом:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k_1\alpha - k_2\alpha^3 = 0. \qquad (31)$$

Таким образом, произвольность угла поворота приводит к нелинейности модели.

Накладывая определенные ограничения на его величину, можно упрощать полученную модель (32). Например, если $\boldsymbol{\alpha(t)}$ - малая величина, то мы пренебрегаем величинами второго и большего порядка малости. Тогда модель (31) станет линейной относительно неизвестной величины $\boldsymbol{\alpha(t)}$:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \qquad (32).$$